3．フラクタルと長時間緩和

神戸大理学部　　高安秀樹　山本稔

緩和の応答関数の関数型としては指数関数がよく知られているが、実際には、指数関数だけではなく、次のような拡張指数型の緩和とベキ乗則に従う緩和の２つがスピングラスやアモルファスの実験によってしばしば観測されている。

$$\phi(t) \simeq e^{-(\nu t)^{\gamma}} \qquad (1)$$

$$\phi(t) \propto t^{-\gamma} \qquad (2)$$

これらの緩和は、150年ほど昔のWeberとGaussの絹糸の緩和に関する発見にまで歴史を逆上ることができるにもかかわらず、最近まで満足のいくような理論的説明のないまま経験則に留まってきた。

しかし、フラクタルに関する研究が進むにつれて事情が変わってきた。これらの緩和がいろいろな意味でフラクタルと密接な関係を持つことがわかってきたのである。その結果、拡張指数・ベキ型の緩和の発生するメカニズムも、だいぶ理論的にすっきりした形が見えてきたといえる。ここではそのような緩和を与えるようなモデルを幾つか紹介する。

まず、（１），（２）式のような緩和を指数緩和の重ね合わせによって考える立場がある。緩和率νの分布関数をｇ（ν）とし、

$$\phi(t) = \int_0^{\infty} g(\nu)\, e^{-\nu t}\, d\nu \qquad (3)$$

とおいたとき、（１）式に対してはｇ（ν）は特性指数がβであるような片側安定分布となり、（２）式の場合には規格化できないが$\nu^{-\gamma}$となる。問題はこのようなｇ（ν）を導くことにおきかえられる。この立場をとるような現象論的な議論は幾つかあり、ガラスの構造緩和などである程度の成果をあげている。たとえば、詳しいことは省略するが、クラスターの形や大きさ分布のフラクタル性を仮定することによって拡張指数型の緩和を導くことができる。

もうひとつのアプローチは、拡散に基づく考え方である。よく知られているように、d

次元空間中の拡散方程式、

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi = \Delta\phi \qquad \phi(\vec{x},0) = \delta(\vec{x}) \tag{4}$$

の解ϕの原点での減衰は、次のようなベキ乗則に従う。

$$\phi(\vec{0},t) \propto t^{-\frac{d}{2}} \tag{5}$$

ここでのdは整数値しかとらないが、フラクタル構造上の拡散を考えると、スペクトル次元と呼ばれる量$\tilde{d}$を導入することにより、そのままの型で（５）式が非整数の次元に対しても成立することになる。また、フラクタル構造上で衝突すると消滅するような２種のものAとB（たとえば、電子と正孔）が拡散するとき、各々の濃度をn_A、n_Bとすると、$n_A \gg n_B$のとき、n_Aは（１）式のような拡張指数型の緩和、

$$n_A(t) \propto e^{-c\cdot t^{\tilde{d}/d}} \tag{6}$$

が得られ、また、$n_A = n_B$のときにはベキの型の緩和をすることが知られている。

アモルファス物質は、原子が平均的には空間を一様に埋めているので、フラクタル次元は空間の次元に一致する。しかし、ボンドの結合のしかたやエネルギー準位のランダムさから興味深いフラクタル性が現われる。たとえば、モビリティエッジのエネルギーをE_mとしたとき、局在状態にあるエネルギーEの状態密度D(E)が次のような分布にしたがっているとき、

$$D(E) \propto e^{(E-E_m)/k_B T_c} \tag{7}$$

その局在状態を熱的揺らぎによって抜け出すのにかかる時間t（待ち時間とよぶ）の分布は、次のようなベキ乗則にしたがうことが知られている。

$$\psi(t) \propto t^{-1-T/T_c} \tag{8}$$

ここで、T_cはエネルギーの分布を決定する定数である。普通のランダムウォークが毎時

刻空間を移動するのにたいし、このランダムウォークはときどきしか移動しない。特に、このようにベキ分布をする場合には、待ち時間の期待値が発散するなど奇妙な性質を持つ。先に述べたような２種の物質Ａ、Ｂがこのようなランダムウォークをするときには、フラクタル空間中でのランダムウォークのときと同様に拡張指数、および、ベキの緩和が導かれる。ベキ緩和のときの指数は、次のように温度に比例する値をとることになる。

$$n_A(t) \propto t^{-T/T_c} \qquad (9)$$

このような温度に依存するような指数を持つベキの緩和はこのモデルだけに限るものではなく、フラクタル的な構造を持つようなポテンシャル中の熱的なランダムウォークでは、しばしば見つけられるようである。

ランダムウォークする粒子の長時間緩和としては、自己速度相関関数のロングタイムテイルも知られている。散乱体が空間に規則的に分布している時には相関は指数的に減衰するが、ランダムに分布しているときには指数減衰の後でベキ乗にしたがうゆっくりした緩和が観測される。この場合のベキの指数は散乱体の分布のフラクタル次元をＤ、空間の次元をｄとしたとき－｛（ｄ－Ｄ）／２＋１｝によって与えられることが予想されている。

参考文献

アモルファスの緩和については

村山和郎、”アモルファスとフラクタル”、フラクタル科学（朝倉書店、1987）。

フラクタルについては

高安秀樹、フラクタル（朝倉書店、1986）。